6/11/17

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $a_1, a_2, \dots a_n$ ακέραιοι με έναν τουλάχιστον από αυτούς διάφορο του μηδενός. Ο φυσικός αριθμός d είναι ο μ.κ.δ. $(a_1, \dots, a_n)$ αν-ν i) $d/a_1, \dots d/a_n$
ii) Αν $\delta/a_1 \dots, \delta/a_n$ τότε δ/d

<u>Απόδειξη</u>: ~~...~~ $(\Leftarrow)$ i) $d/a_1, \dots d/a_n$

ii) $\left.\begin{matrix}\delta/a_1, \dots \delta/a_n \Rightarrow \delta/d \\ d\in\mathbb{N} \Rightarrow \delta \le d\end{matrix}\right\} \Rightarrow d = \mu.\kappa.\delta.$

$(\Rightarrow)$ i) $d/a_1, \dots d/a_n$
Έστω $\delta/a_1, \delta/a_2, \dots \delta/a_n$
Όμως $d = \mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$ υπάρχουν ακέραιοι $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ τ.ω. $d = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$

$\delta/a_1, \delta/a_2, \dots \delta/a_n \Rightarrow \delta/\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = O$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $a_1, a_2, \dots, a_n$ ακέραιοι με ένα τουλ. από αυτούς διάφορος του μηδενός. Ο φυσικ. d είναι ο μ.κ.δ $(a_1, \dots, a_n)$ αν-ν
i) $d/a_1, \dots d/a_n$
ii) $d/\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda a_n$ για κάποιους ακεραίους $\lambda_1, \dots \lambda_n$

<u>Απόδειξη</u>: $(\Rightarrow)$ $d = \mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots, a_n)$
$\Rightarrow d/a_1, \dots d/a_n$
d ~~μκδ~~ $(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$ υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $d = \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n$

$(\Leftarrow)$ $\left.\begin{matrix}\text{i) } d/a_1 \dots d/a_n \\ \text{ii) } d = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda a_n \\ d\in\mathbb{N}\end{matrix}\right\}$ i) $d/a_1, \dots d/a_n$
ii) Αν $\delta/a_1, \dots \delta/a_n \Rightarrow \delta/\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = d$

Ορισμός: Οι ακέραιοι $a_1, a_2, \dots, a_n$ ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους αν $\mu.\kappa.\delta.(a_1, a_2, \dots a_n) = 1$

π.χ. $\mu.\kappa.\delta.(6,10,15) = 1$

Ορισμός: Οι ακέραιοι αριθμοί $a_1, a_2, \dots a_n$ ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο αν $\mu.\kappa.\delta.(a_i, a_j) = 1$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$

π.χ. Οι αριθμοί 6, 10, 15 δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο. Οι αριθμοί 6, 35, 121 είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο. Αφού

$\mu.\kappa.\delta.(6,35) = 1$

$\mu.\kappa.\delta.(35,121) = 1$

$\mu.\kappa.\delta.(6,121) = 1$

Παρατήρηση: Αν οι $a_1, a_2, \dots a_n$ είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο τότε είναι και πρώτοι μεταξύ τους.

Θεώρημα: Έστω $a_1, \dots, a_n$ ακέραιοι με ένα τουλ. από αυτούς διάφορος του μηδενός. Τότε

i) $\mu.\kappa.\delta.(a_1, a_2, \dots, a_n) = \mu.\kappa.\delta.(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$

ii) Αν $\lambda \neq 0$ τότε $\mu.\kappa.\delta.(\lambda a_1, \dots \lambda a_n) = |\lambda|\, \mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots$

iii) $\mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots, a_n) = \mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots a_s, \mu.\kappa.\delta.(a_{s+1}, \dots, a_n))$

Απόδειξη: i) $d = \underbrace{\mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots, a_n)}$, $D = \mu.\kappa.\delta.(|a_1|, |a_2| \dots, |a_n|)$

$\Downarrow$

$d \mid a_1, \dots d \mid a_n \Rightarrow d \mid |a_1|, \dots d \mid |a_n|$ Άρα d κοινός διαιρέτης των $|a_1|, |a_2|, \dots$

$\Rightarrow d \mid \mu.\kappa.\delta.(|a_1|, \dots, |a_n|) = D \Rightarrow d \mid D$ (1)

$D = \mu.\kappa.\delta.(|a_1| \dots |a_n|) \Rightarrow D \mid |a_1| \dots D \mid |a_n| \Rightarrow$
$D \mid a_1, \dots D \mid a_n \Rightarrow D \mid \mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots, a_n) = d$
$\Rightarrow D \mid d$ (2)

Άρα (1), (2) $\Rightarrow d = D$

ii) Έστω $\mu.\kappa.\delta.(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots \lambda a_n) = \delta$

$\mu.\kappa.\delta.(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$

$d = \mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow d / a_1, \dots d / a_n$

$\lambda d / \lambda a_1, \lambda d / \lambda a_2, \dots \lambda d / \lambda a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow |\lambda| d / \lambda a_1, \dots |\lambda| d / \lambda a_n$

$\Rightarrow |\lambda| d / \mu.\kappa.\delta.(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = \delta$ Άρα $|\lambda| d / \delta$

(θ.ν.δ.ο $\delta / |\lambda| d$)

$\mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots, a_n) = d \Rightarrow$ υπάρχουν ακέραιοι $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

τ.ω. $d = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$

$\Rightarrow \lambda d = \lambda_1 \lambda a_1 + \lambda_2 \lambda a_2 + \dots + \lambda_n \lambda a_n$

$\delta = \mu.\kappa.\delta.(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots \lambda a_n) \Rightarrow \delta / \lambda a_1, \dots \delta / \lambda a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta / \lambda_1 \lambda a_1 + \lambda_2 \lambda a_2 + \dots + \lambda_n \lambda a_n = \lambda d$

$\delta / \lambda d \Rightarrow \delta / |\lambda| d$

Άρα $\delta = |\lambda| d$

iii) $\mu.\kappa.\delta.(a_1, a_2, \dots a_n) = \mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots, a_s, (\mu.\kappa.\delta.(a_{s+1}, \dots, a_n)))$

Έστω $d = \mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots a_n)$

$\delta = \mu.\kappa.\delta.(a_{s+1}, \dots a_n)$

$D = \mu.\kappa.\delta.(a_1, a_2, \dots a_s, \delta)$

$d = \mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d / a_1 \\ \vdots \\ d / a_s \\ d / a_{s+1} \\ \vdots \\ d / a_n \end{array} \right.$ $\left. \begin{array}{l} d / a_s \\ d / a_{s+1} \\ \vdots \\ d / a_n \end{array} \right\} d / \delta$

$\left. \begin{array}{l} d / a_1 \\ d / a_2 \\ \vdots \\ d / \delta \end{array} \right\} d / \mu.\kappa.\delta.(a_1, \dots, a_s, \delta) = D$

Άρα d / D

(Θ.ν.δ.ο. $D|d$)

$D = \mu.\kappa.\delta.(a_1, a_2, \ldots \delta) \Rightarrow D|a_1$ $\qquad$ $D|a_1$

$\vdots$

$D|a_s$ $\qquad$ $D|a_s$

$D|\delta \to \delta|a_{s+1} \to D|a_{s+1} \Rightarrow$

$D|\delta \to \delta|a_{s+2}$ $\qquad$ $\vdots$

$\vdots$

$D|\delta \to \delta|a_n$ $\qquad$ $D|a_n$

$D|\mu.\kappa.\delta(a_1, \ldots a_n) = d$

$D|d$

Άρα τελικά $D = d$

__Πρόταση:__ Έστω a, b ακέραιοι με $b \neq 0$ και q, r ακέραιοι έτσι ώστε $a = bq + r$

Τότε $\underbrace{\mu.\kappa.\delta.(a,b)}_{d} = \underbrace{\mu.\kappa.\delta.(b,r)}_{\delta}$

__Απόδειξη:__ $d = \mu.\kappa.\delta.(a,b) \Rightarrow d|a$, $d|b \Rightarrow d|1a - qb = r$

Άρα $\left.\begin{array}{l} d|b \\ d|r \end{array}\right\} \Rightarrow d|\mu.\kappa.\delta.(b,r) = \delta$

$\delta = \mu.\kappa.\delta.(\delta, r) \Rightarrow \delta|b$ ή $\delta|r \Rightarrow \delta|qb + 1r = a$

Άρα $\left.\begin{array}{l} \delta|b \\ \delta|a \end{array}\right\} \Rightarrow \delta|\mu.\kappa.\delta(a,b) = d \Rightarrow \delta|d$ Άρα $d = \delta$

Έστω a ακέραιος κ' b φυσικός

$a = q_1 b + r_1$, $0 \leq r_1 < b$

$\mu.\kappa.\delta(a,b) = \mu.\kappa.\delta.(b, r_1)$

Άρα έχουμε 2 περιπτώσεις: i) $r_1 = 0 \to \mu.\kappa.\delta.(a,b) = \mu.\kappa.\delta(b,0) = b$

ii) $0 < r_1 < b \to$

$\rightarrow$ ~~b/r~~ $b = q_2 r_1 + r_2$, $0 \leq r_2 \leq r_1$ πάλι έχω 2 περιπτώσεις

i) $r_2 = 0 \rightarrow \mu.\kappa.\delta.(a,b) = \mu.\kappa.\delta.(r_1,0) = r_1$

ii) $0 < r_2 < r_1 < b$

$\vdots$

$r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n$, $0 < r_n < r_{n-1} < \ldots < r_1 < b$

$r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n + 0$

οπότε $\mu.\kappa.\delta.(a,b) = \mu.\kappa.\delta.(b,r_1) = \mu.\kappa.\delta(r_1,r_2) =$
$\mu.\kappa.\delta.(r_{n-1}, r_n) = \mu.\kappa.\delta.(r_n,0) = r_n$

Το τελευταίο μη-μηδενικό υπόλοιπο είναι ο μκδ π.χ. Βρείτε το μ.κ.δ. (102, 35) κ' γράψτε τον ως γραμμικό συνδυασμό των 102, 35.

__Λύση:__

$$102 = 2\cdot 35 + 32$$
$$35 = 1\cdot 32 + 3$$
$$32 = 10\cdot 3 + 2$$
$$3 = 2 + 1 \longrightarrow \text{Άρα μ.κ.δ.}(102,35) = 1$$
$$2 = 2\cdot 1 + 0$$

$$1 = 3 - 2 = 3 - (32 - 10\cdot 3) = 11\cdot 3 - 32 = 11(35 - 32) - 32 = 11\cdot 35 - 12\cdot 32 = 11\cdot 35 - 12(102 - 2\cdot 35) = 35\cdot 35 - 12\cdot 102$$